Le nombre d'or.

Michel Cahen et Simone Gutt
mcahen@ulb.ac.be, sgutt@ulb.ac.be
Université Libre de Bruxelles
Campus Plaine, CP 218, Boulevard du Triomphe
BE – 1050 Bruxelles, Belgium
& Académie Royale de Belgique.

1 Nombre d'or niveau 1

Tables multiples,
Irrationnel angoissant.
Nombre divin qui se cache et éclaire
Suites et pavages.
"Le vent se lève!...il faut tenter de vivre,"
comprendre, connaître
Phi, le nombre d'or.

L'oeuvre de Michel Tombroff oppose l'esthétique de quatre rectangles d'or à la complexité des décimales du Nombre d'Or lui-même, représentées par les réglettes de bois de longueurs différentes.

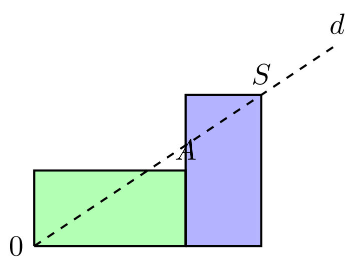
2 Nombre d'or niveau 2

Le **nombre d'or est égal à** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. C'est un nombre "irrationnel", c'est-à-dire qu'il ne peut pas s'écrire comme une fraction $\frac{a}{b}$ avec a et b des entiers. **Il est l'unique solution positive de l'équation** $x^2 - x - 1 = 0$. Une approximation est donnée par $1,61803398$......

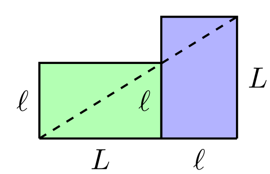
Il serait une expression d'harmonie ou d'esthétique. Il est noté ϕ (phi) en hommage au sculpteur grec Phidias (5e siècle avant Jésus-Christ). À la fin du XVe siècle, Luca Pacioli le nomme **"La divine proportion"** dans un livre illustré par Léonard de Vinci. Johannes Kepler parle d'un joyau précieux, trésor de la géométrie. C'est au XIXe siècle que les noms de **"section dorée"** ou **"nombre d'or"** apparaissent. Le philosophe allemand Adolphe Zeisung fait du nombre d'or une clé de compréhension de nombreux domaines (architecture, peinture, musique, biologie, anatomie). Il obtient un grand succès malgré des fondements scientifiques douteux. Ses théories se propagent au XXe siècle. Le nombre d'or influence certains travaux du compositeur Iannis Xenakis, de l'architecte Le Corbusier, du poète Paul Valéry, et du peintre Salvador Dali.

C'est Euclide (vers 300 av. J.C.) qui en a donné une **première définition comme un rapport entre deux grandeurs : deux grandeurs L et ℓ positives ont un rapport égal au nombre d'or ($\frac{L}{\ell} = \phi$) si et seulement si $\frac{L+\ell}{L} = \frac{L}{\ell}$.**
(En effet $\frac{L+\ell}{L} = \frac{L}{\ell}$ ssi $1 + \frac{\ell}{L} = \frac{L}{\ell}$ ssi $1 + \frac{1}{x} = x$ avec $x = \frac{L}{\ell}$ ssi $x^2 - x - 1 = 0$ et $x = \frac{L}{\ell} > 1$ ssi $x = \frac{L}{\ell} = \frac{1+\sqrt{1+4}}{2} = \phi$.)

Un rectangle est d'or quand le rapport entre sa longueur et sa largeur vaut ϕ. Pour vérifier qu'un rectangle est d'or on en prend deux copies qu'on pose l'une à côté de l'autre, perpendiculairement:



Si la droite d passant par O et S passe par le sommet A, alors le rectangle est d'or.



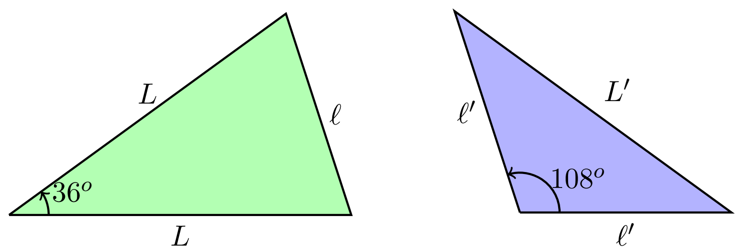
(En effet, le théorème de Thalès nous dit dans ce cas que les deux triangles rectangles de base horizontale et d'hypoténuse suivant la droite d sont homothétiques, donc $\frac{L+\ell}{L} = \frac{L}{\ell}$)

Essayez avec votre carte d'identité et votre carte bancaire.....

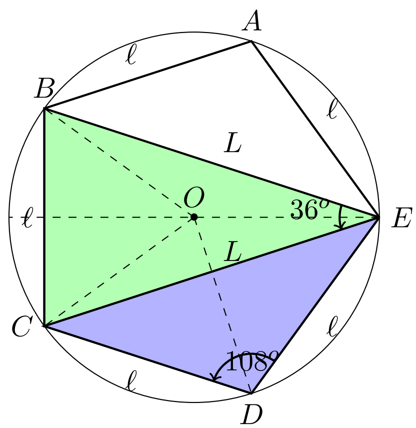
3 Nombre d'or niveau 3

3.1 Triangles d'or

Un triangle est d'or quand il est isocèle et quand le rapport entre la longueur d'un grand côté à celle d'un petit côté vaut ϕ. Pour cela, il faut et il suffit que l'angle au sommet entre les deux côtés d'égale longueur soit égal à 36^o ou à 108^o

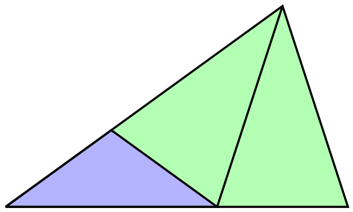


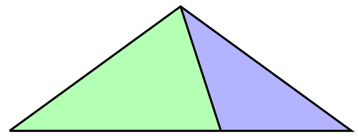
Le triangle vert est appelé triangle d'or aigu, le bleu est appelé triangle d'or obtus. Ce sont les triangles qu'on peut dessiner dans un pentagone régulier :



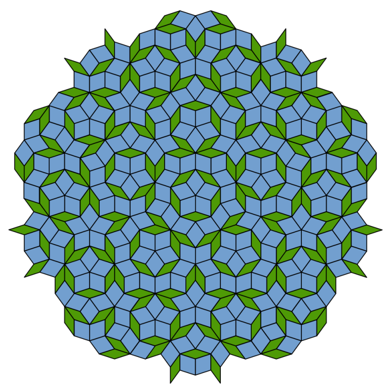
Preuve : L'angle en E du triangle BEC vaut 36^o car c'est la moitié de l' angle en O du triangle BOC et celui-ci vaut $360^o/5 = 72^o$ car on a un pentagone régulier.
L'angle en D du triangle CDE vaut 108^o car c'est le double de l' angle en D du triangle ODC; cet angle est le même que celui en C; l'angle en O vaut 72^o et la somme des angles d'un triangle vaut 180^o.
Ce sont bien des triangles d'or : posons $x = \frac{L}{\ell} > 1$; en regardant le triangle bleu et en observant que l'angle en E vaut 36^o , on a $\cos 36^o = \frac{L/2}{\ell} = \frac{x}{2}$; d'autre part, en regardant la moitié du triangle vert, on obtient $\sin 18^o = \frac{\ell/2}{L} = \frac{1}{2x}$. La relation $\cos 36^o = \cos^2 18^o - \sin^2 18^o = 1 - 2\sin^2 18^o$ devient $\frac{x}{2} = 1 - 2\frac{1}{4x^2}$ donc $x^3 - 2x^2 + 1 = 0 = (x^2 - x - 1)(x - 1)$. L'unique solution x telle que $x > 1$ est bien $x = \phi$.

Ces triangles d'or sont à la base des constructions par Roger Penrose (Prix Nobel 2020) de pavages non périodiques du plan.
Un triangle d'or obtus (resp. aigu) se décompose en deux (resp. 3) triangles d'or tels que la longueur d'un grand côté de chaque nouveau triangle est égale à $\frac{1}{\phi}$ fois la longueur d'un grand côté du triangle initial (et donc égale à la longueur d'un petit côté initial) :





En itérant ces décompositions suivies d'agrandissement par un facteur ϕ, on obtient des pavages



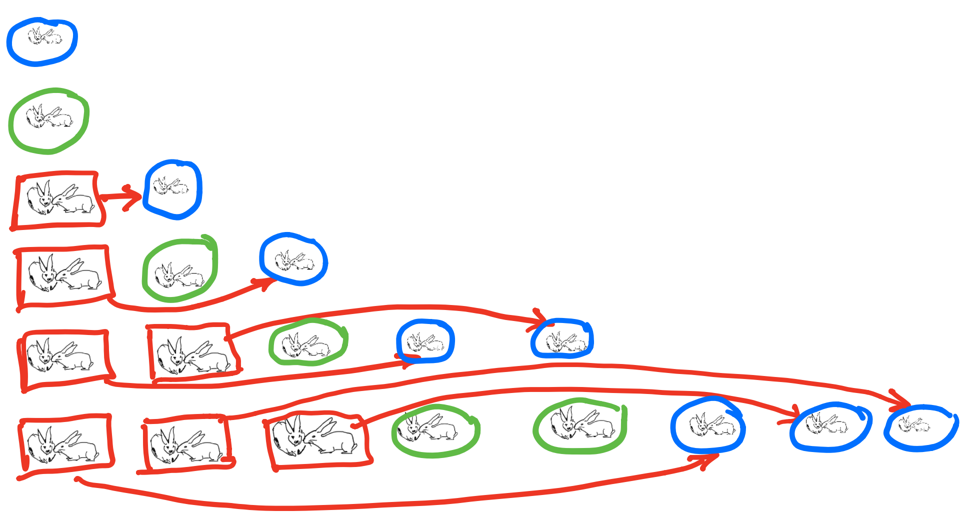
3.2 Nombre d'or et suite de Fibonacci

Le nombre d'or est lié à la suite de Fibonacci. **La suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$ est une suite de nombres entiers dont chaque terme représente la somme des deux termes précédents**

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1},$$

et qui commence par $F_0 = 0$ puis $F_1 = 1$.
Les dix premiers termes qui la composent sont ainsi $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21$ et 34.

La suite de Fibonacci a été introduite par Léonard de Pise (1175- vers 1250), connu sous le nom de Leonardo Fibonacci, et peut être considérée comme le **premier modèle mathématique en dynamique des populations**. Elle décrit la croissance d'une population de lapins sous les hypothèses (très simplifiées) suivantes : chaque couple de lapins, dès son troisième mois d'existence, engendre chaque mois un nouveau couple de lapins, et ce indéfiniment. Le premier mois, on part d'un couple de lapins qui est dans son premier mois d'existence. Le deuxième mois, on n'a toujours que ce même couple, mais le troisième mois ce couple donne naissance à un autre couple et on a donc 2 couples. Le mois suivant, le premier couple engendre encore un autre couple, mais le deuxième couple n'en est encore qu'à son deuxième mois d'existence et n'engendre rien; il y aura donc 3 couples le quatrième mois. Le cinquième mois, les deux premiers couples engendrent chacun un couple, le troisième n'engendre rien et on a donc $3 + 2 = 5$ couples de lapins. La croissance de cette population est décrite par la suite de Fibonacci, F_n désignant le nombre de couples de lapins le $n$ème mois.



Chaque colonne représente un couple de lapins, entouré en bleu lors de son premier mois, en vert lors de son deuxième mois et en rouge à partir du troisième mois. Chaque ligne représente la situation au cours d'un mois. Les flèches rouges indiquent les descendances.

Les termes de la suite de Fibonacci peuvent s'écrire directement en termes du nombre d'or : on a

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi^n + \left(\frac{-1}{\phi} \right)^n \right)$$

Preuve : Si x est une solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ alors $x^2 = x + 1 = x^1 + x^0$, $x^3 = x^2 \times x = x^2 + x^1$ et par récurrence $x^{n+2} = x^{n+1} + x^n$ donc toute suite avec $C_n = Kx^n$ satisfait la propriété $C_{n+2} = C_n + C_{n+1}\, \forall n \geq 0$; l'ensemble des suites satisfaisant cette propriété est un espace vectoriel de dimension 2 car une telle suite est entièrement déterminée par ses valeurs pour $n = 0$ et $n = 1$. Les deux solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ sont $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ donc sont $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $-\frac{1}{\phi} = -\frac{2}{1+\sqrt{5}} = -\frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Donc toute suite $(C_n)_{n \geq 0}$ telle que $C_{n+2} = C_n + C_{n+1}\, \forall n \geq 0$ est donnée par $C_n = K_1 \phi^n + K_2 \left(\frac{-1}{\phi} \right)^n$ où K_1 et K_2 sont des constantes déterminées par les valeurs de C_0 et C_1. En particulier, pour la suite de Fibonacci, $F_n = K_1 \phi^n + K_2 \left(\frac{-1}{\phi} \right)^n$ avec $F_0 = 0 = K_1 + K_2$ et $F_1 = 1 = K_1 \phi - \frac{K_2}{\phi}$ ce qui donne $K_2 = -K_1$ et $1 = K_1(\phi + \frac{1}{\phi}) = K_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}) = K_1 \sqrt{5}$.

Le nombre d'or peut se retrouver à partir de la suite de Fibonacci. On regarde la suite des quotients de deux nombres successifs dans cette suite :

$$(\frac{F_{n+1}}{F_n})_{n \geq 1};$$

les 9 premiers termes sont $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}$.
Le nombre d'or est la limite de cette nouvelle suite; c'est donc la limite du quotient de deux nombres consécutifs dans la suite de Fibonacci.

Preuve : Par la formule plus haut, comme $\frac{1}{\phi} < 1$, pour n suffisamment grand $\left(\frac{1}{\phi} \right)^n$ devient très petit et $F_n \simeq \frac{1}{\sqrt{5}} \phi^n$ donc $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ tend vers $\frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \phi^{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{5}} \phi^n} = \phi$.

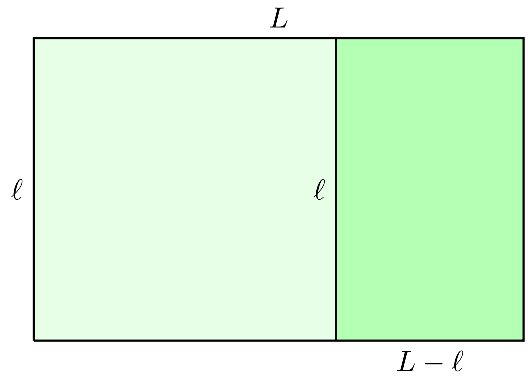
3.3 Spirale d'or

En dessinant un plus grand carré possible dans un rectangle d'or, ce qui reste est encore un rectangle d'or.

Preuve : On part d'un rectangle de longueur L et largeur ℓ qui est un rectangle d'or, donc $\frac{L}{\ell} = \phi$. On enlève un carré de côté ℓ. Il reste un rectangle de longueur ℓ et de largeur Ł $- \ell$. C'est bien un rectangle d'or car

$$\frac{\ell}{L-\ell} = \frac{1}{\left(\frac{L-\ell}{\ell}\right)} = \frac{1}{\phi - 1} = \phi$$

puisque $\phi(\phi - 1) = \phi^2 - \phi = 1$.



Pour obtenir la spirale d'or on dessine des quarts de cercle qui se suivent dans les carrés qu'on obtient successivement dans ces rectangles d'or.