Pi, e, et i : les trois nombres incontournables

Luc Lemaire
Département de mathématique
Université libre de Bruxelles

Pi (π) est sans doute le nombre le plus incontournable en mathématique, mais il est rejoint sur le podium par deux autres nombres : le nombre complexe « i », racine carrée de -1, et le nombre d'Euler « e », base de la fonction exponentielle.

1 Le nombre π

Le nombre π est défini par la formule $p = 2.\pi.r$, où p représente le périmètre d'un cercle et r son rayon. Il apparait il y a 4000 ans sur une tablette babylonienne, dans le calcul de la longueur de la circonférence d'un cercle.
Après des siècles d'étude, il a progressivement quitté la géométrie pour gagner l'algèbre, la théorie des nombres et l'analyse, puis toutes les sciences. On en connait aujourd'hui 31 mille milliards de décimales.
Mais deux autres nombres se sont également imposés d'eux-mêmes : i et e.

2 Le nombre i

Lorsqu'on veut résoudre l'équation quadratique

$$a.x^2 + b.x + c = 0$$

on trouve la formule

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

qui a posé un sérieux problème lorsque $b^2 - 4ac$ est négatif. En effet aucun nombre réel n'a comme carré un nombre négatif. Par exemple:

$$1^2 = +1, \text{ et } (-1)^2 \text{ vaut également } +1.$$

"$\sqrt{-1}$" n'est donc pas réel.

Il a fallu presque deux siècles pour que le nombre $\sqrt{-1}$ soit progressivement reconnu et admis (environ de 1570 à 1750). Ce nombre n'est pas réel, on l'appelle imaginaire et on agrandit l'ensemble des réels pour obtenir des « nombres complexes » de la forme $a + b.i$, où a et b sont réels et où on a posé $i = \sqrt{-1}$.

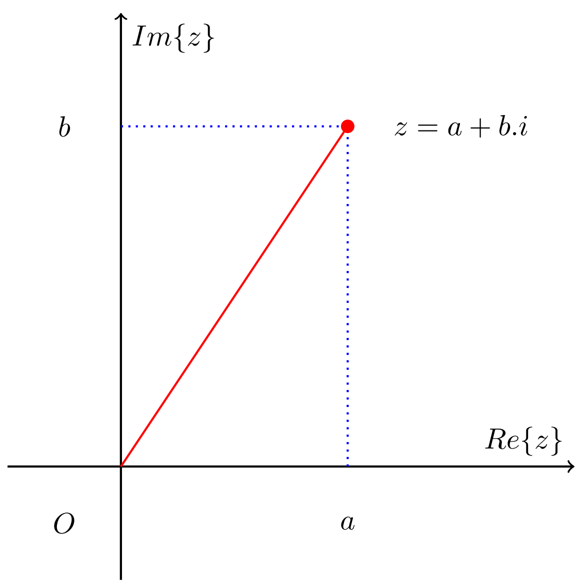
Il est alors facile de calculer avec ces nombres : on emploie les règles habituelles et on remplace i^2 par -1 chaque fois qu'il se présente.
Par exemple pour l'addition :

$$(a + b.i) + (c + d.i) = (a + c) + (b + d).i$$

et pour la multiplication :

$$(a + b.i).(c + d.i) = (a.c) + (b.i.d.i) + (a.d.i) + (b.i.c) = (a.c - b.d) + (a.d + b.c).i$$

Vu aujourd'hui, c'est vraiment très simple : un nombre complexe z est un point d'un plan, de coordonnées (a, b) représentant $z = a + b.i$.



3 Le nombre e

Le nombre e (le nombre d'Euler ou constante de Néper) est plus difficile à définir, mais apparaît également comme indispensable dans de nombreux domaines.

Il est défini par

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

Ceci veut dire qu'en prenant successivement $n = 1, 2, 3, 4$ *etc.*, le nombre calculé s'approche arbitrairement près d'une limite. On dit que la suite converge vers la limite e.

Cette limite vaut $e = 2,7182818\ldots$.

Voyons deux formules où ces nombres apparaissent sans qu'on l'ai imposé.

Pour un nombre entier positif n, on désigne par « $n!$ » (factorielle de n) le produit de tous les nombres de 1 à n. Par exemple, $4! = 1.2.3.4 = 24$.

On se doute que ce nombre grandit très rapidement quand n augmente. Par exemple 25! est un nombre de 25 chiffres, 1000! a 2568 chiffres.
Que se passe-t-il quand n tend vers l'infini ? Peut-on approcher cette limite en évitant toutes les multiplications ?

La réponse est donnée par la formule de Stirling (1730) :

$n!$ tend vers l'infini à la même vitesse que :

$$(\frac{n}{e})^n.\sqrt{2\pi n}$$

Si on veut être précis, ceci signifie que le quotient $(\frac{n}{e})^n.\sqrt{2\pi n}$ divisé par $n!$ tend vers 1.

Pour le calcul de $n!$ pour n très grand, cette formule peut être avantageuse.

Mais surtout : on calcule un nombre qui est un simple produit d'entiers, sans autre ingrédient que la multiplication des entiers, et la réponse contient « e » et « π ». C'est un exemple de la manière dont ces nombres s'imposent en mathématique, sans qu'on les y ait invités.

Le nombre « e » apparait le plus souvent dans le cadre de la fonction exponentielle notée e^x.
Pour un nombre entier x, elle représente simplement le produit de x copies de « e » : par exemple $e^3 = e.e.e$. On doit alors généraliser ceci quand x n'est pas entier, et une manière est de définir e^x par :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ..., \quad -\infty < x < +\infty$$

On trouve e en remplaçant x par 1 dans la formule et on obtient

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...$$

Une démonstration montre alors que cette somme vaut bien le nombre e défini avant :

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$$

Une propriété fondamentale des fonctions exponentielle est que pour deux valeurs x et y :

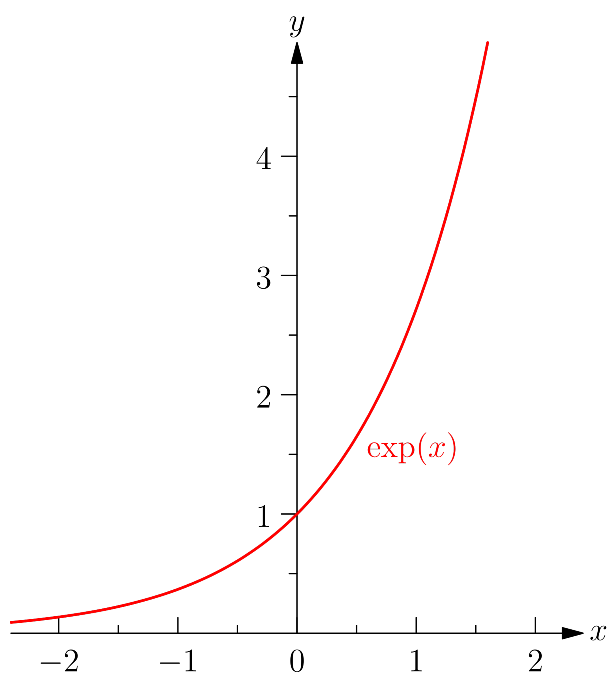
$$e^{x+y} = e^x.e^y$$

Pour des nombres entiers positifs, cette formule dit simplement que (par exemple): $(e.e.e.e.e) = (e.e).(e.e.e)$.

Mais dans cette formule générale où il suffit de savoir calculer les x^n avec n entier positif, on peut prendre pour x non seulement des nombres entiers ou réels mais des nombres complexes.

La formule générale $e^{x+y} = e^x.e^y$ se démontre par un calcul un peu difficile, mais sans surprise.

Voici le graphe de l'exponentielle réelle. Il faut souligner combien elle augmente vite pour x croissant. Par exemple, e^{10} vaut $22026, 46...$ et e^{-10} vaut $0, 000045...$

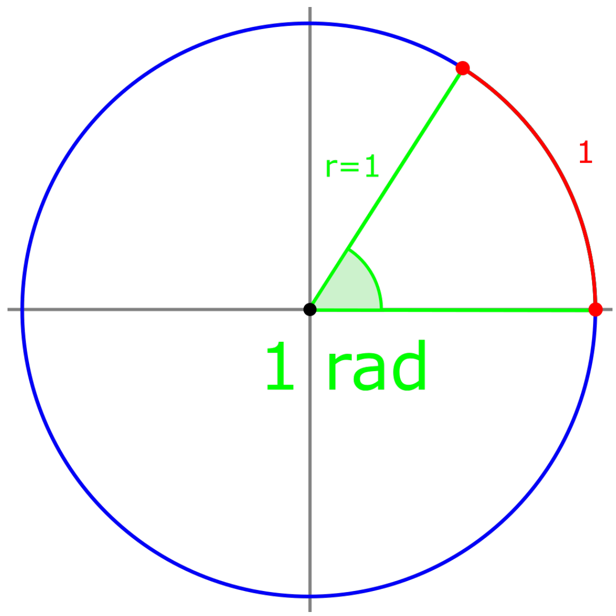


4 Comment mesurer des angles?

La question semble simple : un angle droit mesure 90 degrés, un angle plat 180 degrés et ainsi de suite. Cette mesure est très pratique et utilisée couramment. Mais du point de vue mathématique elle est tout-à-fait arbitraire : à un certain moment on a choisi le nombre 90. On aurait pu en choisir un autre et obtenir des valeurs différentes pour le même angle.

En mathématique, on cherche une mesure qui ne dépende pas d'un choix arbitraire.

La plus naturelle est de prendre le rayon d'un cercle (C) de rayon 1 et de l'enrouler sur le cercle lui-même. L'angle déterminé par cette longueur de cercle est appelé le radian. Notons que nous n'avons fait aucun choix arbitraire de nombre.



Comme la longueur de la circonférence de rayon 1 est 2π, la mesure en radian de la circonférence complète est 2π. Donc par exemple la mesure d'un quart de tour vaut $\frac{\pi}{2}$ radians et un celle d'un demi-tour vaut π radians. De nombreuses formules mathématiques sont correctes en radians, et ne le seraient pas en degrés.

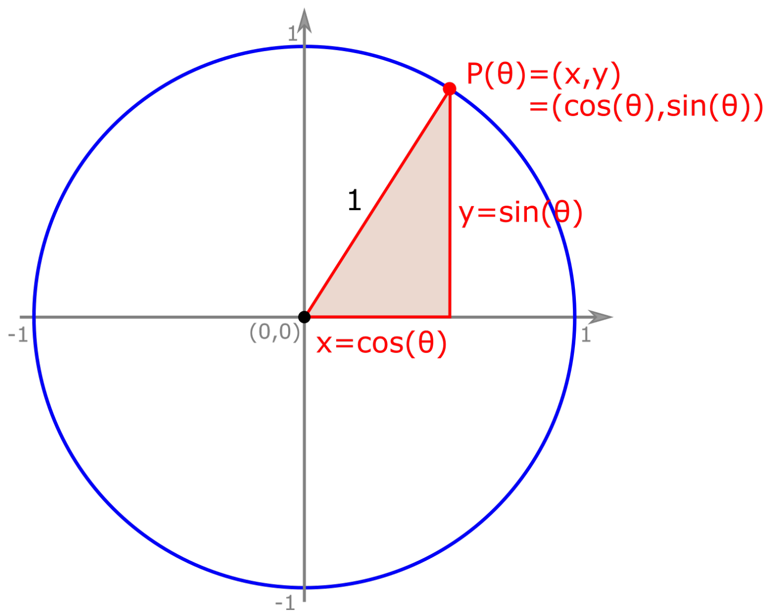
5 Sinus, cosinus et exponentielle

Partons d'un triangle rectangle. Par rapport à un sommet qui n'est pas celui de l'angle droit - appelons θ l'angle du triangle en ce sommet - on définit le sinus de θ comme la longueur du côté opposé divisée par la longueur de l'hypoténuse. Le cosinus est la longueur du côté adjacent divisé par celle de l'hypoténuse.

La manière la plus simple de représenter ces nombres est de partir d'un cercle de rayon 1 centré en l'origine $(0,0)$ d'un système de coordonnées euclidiennes (x,y) appelé « cercle trigonométrique ». Dans le dessin, la longueur de l'hypoténuse vaut 1, donc les divisions de la définition de sinus et cosinus disparaissent puisqu'on divise par 1.

Comme le cercle est de rayon 1, $x^2 + y^2 = 1$ sur le cercle, et donc

$$cos(\theta)^2 + sin(\theta)^2 = 1$$



Si vous vous souvenez des séries de Taylor, vous savez que :

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$$

et

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

formules uniquement valables en radians.

En comparant ces formules avec celle de l'exponentielle, on obtient :

$$e^{ix} = cos(x) + i.sin(x)$$

un lien entre la fonction exponentielle, les nombres complexes et la trigonométrie.

A nouveau, dans ce calcul qui ne comporte que des puissances de la variable, rien n'empêche d'accepter que x soit un nombre complexe noté $z = x + i.y$.

La fonction e^z pour z un nombre complexe contient donc à la fois

- la fonction exponentielle e^x
- et les fonctions trigonométriques $cos(y)$ et $sin(y)$ par la formule

$$e^{x+iy} = e^x.e^{iy} = e^x.(cos(y) + i.sin(y))$$

Dans son célèbre Cours de Physique, Richard Feynman (Prix Nobel 1965) estime que cette formule est « l'une des formules les plus remarquables de toutes les mathématiques ».

Finalement, posons $z = i.\pi$.
Comme $sin(\pi) = 0$ et $cos(\pi) = -1$, nous obtenons $e^{i.\pi} = -1$, c'est-à-dire

$$e^{i.\pi} + 1 = 0$$

Cette formule d'Euler est célèbre pour employer les nombres 0, 1, e, i et π, cinq constantes fondamentales des mathématiques en une seule formule. On peut d'ailleurs y ajouter l'addition, la multiplication et l'exponentiation, ainsi que l'égalité.